UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON SORBONNE
UFR DE GESTION

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

A L'ECONOMIE ET A LA GESTION

LICENCE 2° année

Cours de Thierry LAFAY

TRAVAUX DIRIGES
1° semestre

2007-2008

Thème n°1 : Rappels

Exercice 1

Déterminez l'ensemble de définition, de dérivabilité et la fonction dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(X) = \sqrt{(X^2 - 4)}$ b) $g(X) = |2X + 4|$

Exercice 2

Calculez $Lim_{X \to +\infty} f(X)$ pour la fonction $f(X) = \sqrt{X + \sqrt{X + \sqrt{X}}} - \sqrt{X}$

Exercice 3

Étudier et représenter graphiquement la fonction :

$f : R \to R$

$x \mapsto \ln(-2x + 1) + 3$

Thème n°2 : Algèbre Linéaire

Exercice 1

a) Les vecteurs (1,-5,3), (1,-2,2) et (2,5,1) sont-ils liés ? Quel est le rang de la famille qu'ils forment ?

b) Est-ce que l'ensemble $\{(1,2);(1,-1);(1,1)\}$ est un système générateurs de R^2 ? Est-ce une base de R^2 ?

Exercice 2

Dans R^3 muni de la base canonique, considérons les vecteurs suivants :

$X = (2,3,1) \qquad Y = (1,2,2) \qquad Z = (0,1,2)$

a) Ces trois vecteurs forment-ils une base de R^3 ?

b) Le vecteur $T = (1,0,0)$ se décompose-t-il de manière unique sur $\{X,Y,Z\}$? Si oui, expliciter cette décomposition.

Exercice 3

Soit f l'application suivante : $f(x,y,z) = (2x+3y, y+2z)$

a) Est-elle linéaire ?

b) Déterminer le rang et le noyau de f

c) L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4

Soit f une application de R^2 vers R^3 définie par : $f(x,y) = (2x, 0, x+y)$

a) Rappeler dans le cas général, la définition précise de chacun des termes suivants :

- Une application linéaire également appelée homomorphisme d'espaces vectoriels
- Le rang d'une application linéaire
- Le noyau d'une application linéaire

b) Vérifier que f est une application linéaire

c) Déterminer le rang de f

d) Déterminer le noyau de f, noté $Ker[f]$

e) En déduire si f est injective

f) $Ker[f]$ est-il un sous-espace vectoriel de R^2

Thème n°3 : Les matrices

Exercice 1

Calculez lorsque cela est possible :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit E le R-espace vectoriel de polynômes de degré au plus 4.

Soit $u : E \to E$ l'application linéaire donnée par $u(p) = p + p'$

Remarque : p' est la dérivée de p

a) Montrez que $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ de E est une base qui convient pour E. Calculez la matrice représentative de u pour cette base au départ et à l'arrivée.

b) Montrez que $u - Id$ est nilpotente. Déterminer le plus petit entier $n > 0$ tel que $(u - Id)^n = 0$.

c) Calculez le valeurs propres de u.

Exercice 3

Calculez AB et BA

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 & 1 \\ -0.2 & 0.3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comment appelle-t-on A et B ?

Exercice 4

Résoudre :

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m + 2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m + 2 \end{cases}$$

Exercice 5

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{pmatrix}$

Pour quelles valeurs du paramètre réel a la matrice M est inversible ? Calculez la matrice inverse par la méthode du pivot.

Exercice 6

Soit la matrice $M = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$

a) Cette matrice est-elle diagonalisable ?

b) Trouver les valeurs propres de M

c) Trouver une base de R^3 composée de vecteurs propres de M

d) Trouver des matrices de passage P et P^{-1} et la matrice diagonale D.

Exercice 7

Afin d'en finir avec le village des irréductibles gaulois, César fait appel à un sorcier qui prétend être capable de rendre invulnérable l'armée romaine. Le sorcier indique que pour vaincre les gaulois, les soldats devront absorber trois préparations : la *forcum*, *l'habilum* et la *plastrum*.

La fabrication de ces préparations nécessite trois ressources rares : *l'herbalum*, *l'harrissum* et la *moutardum*.

La fabrication d'un litre de *forcum* nécessite :	4 feuilles *d'herbalum*
	5 grammes *d'harrissum*
	3 grammes de *moutardum*
La fabrication d'un litre *d'habilum* nécessite :	3 feuilles *d'herbalum*
	6 grammes *d'harrissum*
	2 grammes de *moutardum*
La fabrication d'un litre de *plastrum* nécessite :	4 feuilles *d'herbalum*
	3 grammes *d'harrissum*

César est en mesure de mettre à disposition au vieux sorcier :

700 feuilles *d'herbalum*

845 grammes *d'harrissum*

335 grammes de *moutardum*

Résolvez le programme de production par la méthode des déterminants (méthode des matrices déduites ou encore de Cramer), la méthode des cofacteurs et par la méthode du pivot.

Exercice 8

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

a) Montrer que A est singulière. En déduire une valeur propre de A.

b) Trouver les autres valeurs propres de A.

c) A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice réduite diagonale D de A et déterminer la matrice de passage P.

d) Calculer A^n

Exercice 9

On étudie l'application linéaire suivante :

$f_\alpha(x,y,z) = (x+2y-2z, 2x+y+\alpha z, 2x+2y-3z)$

a) Justifiez rapidement mais clairement la linéarité de f_a

b) Déterminez le noyau de f_α en fonction de α.

c) Déterminez si f_α est injective, surjective bijective en fonction de α.

Pour la suite on suppose $\alpha=-2$

d) Déterminez M la matrice représentative de f. M est-elle inversible ?

e) Déterminez les valeurs propres de M (Vérifiez vos résultats avec les méthodes habituelles).

f) La matrice est-elle diagonalisable ? (Justifiez). Calculez les vecteurs propres (on choisira des vecteurs propres dont la 1ere composante non nulle vaille 1).

g) Calculez les matrices de la décomposition sous la forme $P.D.P^{-1}$

h) Calculez explicitement M^n pout tout n. Puis calculez $f^{46}(2,1,2)$.

i) Donnez la solution du système suivant :

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + 2Y_n - 2Z_n \\ Y_{n+1} = 2X_n + Y_n - 2Z_n \\ Z_{n+1} = 2X_n + 2Y_n - 3Z_n \end{cases} \quad \text{avec pour conditions initiales} \quad \begin{cases} X_0 = 1 \\ Y_0 = 0 \\ Z_0 = 1 \end{cases}$$

Thème n°4 : Les fonctions de plusieurs variables

Exercice 1

Rappeler le théorème de Rolle et le vérifier sur la fonction $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

Rappeler le théorème des accroissements finis et le vérifier sur la fonction $f(x)=x^2-x$ définie sur l'intervalle fermé [1 , 2].

Exercice 2

Rappeler les dérivées des fonctions usuelles

Exercice 3

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

a) $Log\left(1+\frac{y}{x}\right)$ b) $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Exercice 4

Calculer les dérivées partielles secondes des expressions suivantes :

a) $\frac{x-y}{x+y}$ b) x^y c) $x\cdot e^{y^2}$

Exercice 5

Soit $f(x,y)=Ln\frac{y}{x}$

Vérifier que cette fonction définit une fonction homogène de deux variables x et y. Calculer son degré d'homogénéité et monter qu'elle vérifie le théorème d'Euler

Exercice 6

Soit la fonction $F(x,y)=\left(ax^2y;\ln xy;\frac{b}{x^2+y^2}\right)$

Déterminer la matrice jacobienne de cette fonction.

Exercice 7

a) Soit la fonction de production suivante où x et y représentent respectivement les quantités positives et non nulles de travail et de capital : $f(L,K)=\frac{KL}{2L+K}$
b) Déterminer la nature des rendements d'échelle. f vérifie-t-elle le théorème d'Euler ?
c) Établir l'équation de la courbe de niveau pour un volume de production de V
d) Déterminer le taux marginal de substitution technique de K à L.
e) Si V=3, calculer le TMS au point des coordonnées (6 , 12). Expliquer.
f) Retrouver le TMS en utilisant la courbe de niveau.
g) Soit $r=K/L$ et $T=TMS(K,L)$ de K à L. On appelle élasticité de substitution de K à L la quantité notée σ définie par le rapport : $\sigma=\frac{dr}{r}\Big/\frac{dT}{T}$. Calculer σ et interpréter.

Exercice 8

Une étude marketing a permis d'établir avec précision la fonction de demande d'un bien A sur un marché oligopolistique, où deux concurrents commercialisent les biens B et C.

Soit la fonction : $D_A = P_A^{-0.3} \cdot P_B^{0.1} \cdot P_C^{-0.4}$

Calculer les élasticités partielles de la demande du bien A par rapport au prix du bien A, du bien B puis du bien C. Commenter.

Exercice 9

Soit $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$

Montrer que f admet des dérivées partielles à l'origine mais qu'elle n'est pas continue en ce point.

Exercice 10

Écrire le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{1+2x} - (1+x)$

b) $g(x) = e^{3x} - 3e^{x} + 2$

c) Déduire la limite de $f(x)/g(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 11

Écrire le développement de Taylor au voisinage de 0 à l'ordre P pour les fonctions suivantes :

a) $f(x) = Ln(1+x)$

b) $g(y) = \cos y$

Exercice 12

On considère la fonction f définie par $f(x,y) = \ln(1+x) + 0.5\ln(1+y)$

On note $\hat{f}_0$ l'approximation affine de $f(X)$ au voisinage de (0,0)

On note $\tilde{f}_0$ l'approximation quadratique de $f(X)$ au voisinage de (0,0)

a) Écrire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de (0,0) de f.

b) En déduire $\hat{f}_0$ et $\tilde{f}_0$

c) Déduire les approximations correspondantes pour $X = (0.1;0.2)$ puis comparer avec la valeur exacte donnée par votre calculatrice.

Exercice 13

Trouver tous les polynômes $P(x,y)$ homogènes de degré n des deux variables x et y vérifiant : $\dfrac{1}{x}P'_x(x,y) = \dfrac{1}{y}P'_y(x,y)$

Exercice 1

Soit la fonction $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2 + x - 2y$

a) f est-elle de classe C^∞ sur R²

b) Calculer les dérivées partielles premières de f en $X = (x,y)$

c) Calculer les dérivées partielles secondes de f en $X = (x,y)$

d) Former la matrice hessienne de f. f est-elle convexe ou concave sur R² ?

Exercice 2

Rechercher les extrema des fonctions suivantes :

$f_1(Z) = xy - x^2 - y^2$ $\quad f_2(Z) = xy - \ln(x^2 + y^2)$ $\quad f_3(Z) = y^4 + x^2 - 2y^2$

Exercice 3

Soit $f = \dfrac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$

a) Optimiser la fonction f

b) Les solutions trouvées sont-elles des solutions globales du problème ?

Exercice 4

On suppose que C est une fonction de coût telle que : $C(X) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$

Où X est un vecteur de R^3 dont les composantes sont x, y et z, quantités des facteurs de production.

On notera A la matrice associée à la forme quadratique $C(X)$. Soient W_2 et W_3 deux vecteurs de R^3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad W_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad W_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que les vecteurs W_2 et W_3 sont orthogonaux

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

c) Déterminer les valeurs propres de par ordre croissant

d) Déterminer les vecteurs propres V_1, V_2 et V_3 tel que :

- La dernière composante de chaque vecteur propre soit égale à 1
- Les vecteurs propres soient deux à deux orthogonaux

e) Déduire le noyau de l'application linéaire que la matrice A représente, puis le rang de A.

f) Déterminer la matrice P orthonormée telle que $A = P \cdot D \cdot {}^t P$ où D est la matrice diagonale portant les valeurs propres

g) Déterminer les composantes f_i du vecteur F pour que l'on ait : $C(X) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i f_i^2$

h) En déduire la nature de la forme quadratique $C(X)$

i) Déterminer les points candidats à l'optimum pour la fonction $C(X)$. Conclure sur leur nature après avoir déterminé la matrice hessienne des dérivées secondes.

Exercice 5

Soit une fonction Cobb-Douglas : $z = f(x_1, x_2) = c \cdot x_1{}^a \cdot x_2{}^b$ où x et y sont les quantités de facteurs utilisés, et a, b et c sont des nombres réels strictement positifs.

On appelle p le prix d'une unité produite, et p_1 (p_2) le prix d'une unité de facteur x_1 (x_2). Ces prix sont évidemment positifs.

Le profit lié à cette production est donné par la fonction $\pi = \pi(x_1, x_2) = pz - (p_1 x_1 + p_2 x_2)$.

Quelles conditions doivent vérifier a et b pour qu'il y ait une production donnant un profit maximum ?

Exercice 6

Monsieur Yadéhoyadéba possède un portefeuille boursier constitué uniquement d'actions X et Y dans des proportions h et (1-h). Son fils étudiant en IUP finance, après lui avoir indiqué qu'une bonne gestion de portefeuille impliquait une meilleure diversification, lui signale que la rentabilité de son portefeuille boursier peut-être mesurée de la manière suivante :

$$R_p = h \cdot R_X + (1-h) R_Y$$

et que le risque de son portefeuille équivaut à l'équation suivante :

$$Var(R_p) = h^2 \cdot Var(R_X) + (1-h)^2 \cdot Var(R_Y) + 2h(1-h) Cov(R_X, R_Y)$$

Déterminer la proportion d'actions X et Y que doit posséder Monsieur Yadéhoyadéba de manière à ce que le risque de son portefeuille soit minimal. Quelle(s) hypothèse(s) doit-on faire ?

Remarque : R_u est la rentabilité de l'actif U ; $VaR(U)$ est le risque de l'actif U ; $Cov(U_1, U_2)$ correspond à la covariance entre deux actifs.

Exercice 7

Monsieur Fricasset possède un portefeuille boursier uniquement constitué d'actions A et B en proportions a et b. Un pseudo cabinet de « conseil » mesure l'espérance de la rentabilité moyenne du portefeuille de la manière suivante : $R_p = -2.5a^2 - 10b^2 + 10a + 20b$

Déterminer les proportions a et b pour que la rentabilité moyenne soit maximale.

Exercice 8

On considère une économie simplifiée composée de deux individus A et B consommant deux biens X et Y. Leurs fonctions d'utilité sont respectivement :

$$U^A\left(X^A, Y^A\right) = Ln\frac{X^A+2}{2} + Ln\frac{Y^A+4}{4}, \quad X^A, Y^A \geq 0$$

$$U^B\left(X^B, Y^B\right) = Ln\frac{X^B+4}{4} + Ln\frac{Y^B+2}{2}, \quad X^B, Y^B \geq 0$$

Les stocks de biens X et Y disponibles pour la consommation sont égaux respectivement à 2 et à 10. On suppose que les stocks de biens sont intégralement consommés.

Un optimum de distribution au sens de Pareto est un état de l'économie associant à tout niveau d'utilité réalisable d'un consommateur le niveau maximum d'utilité réalisable pour l'autre consommateur. Par ailleurs, on appelle courbe des contrats de l'économie le lieu géométrique de ces optima dans l'espace des consommations. Ainsi dans cet exercice, vous allez chercher à obtenir Y^B en fonction de X^B en maximisant l'utilité U^A avec $U^B = \overline{U}^B$ fixé comme contrainte (non unique).

a) Écrire le programme de maximisation.

b) Déterminer la courbe des contrats de cette économie à l'aide du lagrangien.

c) L'hypothèse concernant la consommation complète des stocks a-t-elle une incidence sur le programme de maximisation ?

Remarque : la lagrangien ne prendra pas en compte les contraintes de non négativité

Exercice 9

Soit $f(x, y, z) = z$

a) Optimiser f sous les contraintes $\begin{cases} x^2 = 2 - y^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

b) Optimiser f sous les contraintes $\begin{cases} x^2 = 2 - y^2 \\ x + y + z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$

Thème n°6 : Les Complexes

Exercice 1

Écrivez sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$Z_1 = (3+i)(5-2i)$; $Z_2 = (4-7i)^3$

$Z_3 = it^2 - 3t + 4 - 2i \quad (t = x + iy;\text{x et y réels})$

Exercice 2

Trouvez les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$Z_4 = \dfrac{(6-7i)}{(1+i)}$; $Z_5 = \dfrac{(3-i)}{(2i-5)}$

Exercice 3

Déterminez le module des nombres complexes Z_1, Z_2, Z_4 et Z_5 ainsi qu'une valeur approchée de leurs arguments.

Exercice 4

Trouvez la forme algébrique des solutions des équations suivantes :

$(1+2i)t = 3t - 5i + 2$; $t - (5+2i)\bar{t} = 2t - 5i$

Exercice 5

Déterminer Z_6 et Z_7 pour que leur somme soit égale à $[-5+4i]$ et leur produit à $[3-11i]$.

Exercice 6

Déterminez le complexe Z_8 de telle sorte que Z, $\left(1/Z\right)$ et $(1-Z)$ aient le même module.

Exercice 7

Déterminer le module, l'argument, la partie réelle et la partie complexe des nombres suivants :

$Z_9 = i \cdot e^{i\pi/3}$, $Z_{10} = -e^{-i\cdot\pi/4}$, $Z_{11} = 1 + i\sqrt{3}$, Z12=(Z10)^2

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble des complexes et représenter les solutions dans le plan complexe :

$t^2 + 7 = 0$; $3t^2 + t + 5 = 0$

Thème n°7 : Les Suites

Exercice 1

Étudier la suite $\{U_n\}$ définie par la relation de récurrence suivante :

a) $U_{n+1} = \sqrt[3]{U_n + 6}$, $U_0 = 3$

b) $U_{n+1} = Ln(1 + U_n)$, $U > 0$

Exercice 2

Nous souhaitons étudier le prix du café qui résulte de la confrontation de l'offre et de la demande. On admet que les producteurs déterminent la quantité produite de la manière suivante : $S_t = P_{t-1} - 3$. La demande est donnée par la fonction $D_t = 15 - 1{,}5P_t$. On suppose que le prix d'équilibre est tel que l'offre égalise la demande. Étudier la stabilité du prix.

Exercice 3

On considère la suite récurrente d'ordre 1 définie par :

$$U_{n+1} = \frac{\left(U_n^2 - U_n + 1\right)}{U_n} \qquad , U_0 = a$$

a) Montrer que U_n est définie pour tout $a \in R^*$

b) Montrer par récurrence que si $a < 0$, alors $U_n < -n$ pour tout $n \in N$. Que peut-on en déduire pour $\{U_n\}$ lorsque $a < 0$?

c) Dresser le tableau de variation de la fonction : $f(x) = x - 1 + 1/x$ et construire le graphe de f dans R^{+*}.

d) A l'aide de la question précédente étudier la convergence de la suite $\{U_n\}$ lorsque $a > 1$. En déduire que $e = 1$ est le seul équilibre de ce système.

e) Étudier la stabilité locale de e

f) Montrer graphiquement que $\{U_n\}$ converge vers 1 lorsque $0 < a < 1$

g) Déterminer l'ensemble de stabilité de e, noté $S(e)$

Thème n°8 : Équations de récurrence linéaires

Exercice 1

a) Veuillez résoudre l'équation de récurrence suivante :

$$X_t = 4X_{t-1} - 13X_{t-2} + 10$$

On vous indique également que $X_0 = 5$ et $X_1 = 9$.

b) L'équilibre est-il stable ?

c) Quelle est la nature du mouvement ?

Exercice 2

Résolvez le système d'équations de récurrence suivant par la méthode de diagonalisation des matrices :

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{pmatrix}$$

Remarque: aucune indication n'est délivrée concernant les valeurs initiales de X_t et Y_t notées respectivement X_0 et Y_0

Exercice 3

Résolvez les équations de récurrence de deuxième ordre :

a) $3 \cdot U_{n+2} - 3 \cdot U_{n+1} + U_n = 0$ $\quad U_0 = 1;\ U_1 = 0$

b) $3 \cdot U_{n+2} - 3 \cdot U_{n+1} + U_n = 1$ $\quad U_0 = 1;\ U_1 = 0$

c) $9 \cdot U_{n+2} + 6 \cdot U_{n+1} + U_n = (-1/3)^n$ $\quad U_1 = 3;\ U_2 = 1$

d) $9 \cdot U_{n+2} - 3n = 9 \cdot U_{n+1} - 3 \cdot U_n + 6$ $\quad U_0 = 1;\ U_1 = 0$

e) $U_{n+2} - 3 \cdot U_{n+1} + 2 \cdot U_n = n$

f) $2 \cdot U_{n+2} - 3 \cdot U_{n+1} + U_n = 1 + 2^n$

Exercice 4

Soit la suite $[T_n]$ définie par la relation de récurrence suivante :

$T_0 = 2 \cdot e$, $T_1 = 2 \cdot e^2$ et $T_{n+2} = 2^7 \cdot (T_{n+1})^{-2} \cdot (T_n)^{-4}$

a) En posant $U_n = Ln(T_n)$ montrez que la suite (U_n) est définie par une relation de récurrence linéaire.

b) Trouvez l'expression du terme général de la suite (U_n)

c) En déduire l'expression du terme général de la suite (T_n)

d) A titre de vérification, calculez T_2 de deux manières différentes.

Exercice 5

Soit le système suivant:

$$\begin{cases} X_t = \dfrac{1}{2} X_{t-1} + \dfrac{1}{4} Y_{t-1} + 2 \\ Y_t = 2X_{t-1} + 2Y_{t-1} - 4 \end{cases}$$

a) Quel est l'équilibre de ce système ?

b) Construire le diagramme des phases

Exercice 6 : l'oscillateur de Samuelson

Supposons que les équations du modèle soient les suivantes :

$$\begin{cases} Y_t = C_t + I_t + G \\ C_t = c \cdot Y_{t-1} \\ I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) \end{cases}$$

Où Y_t, C_t et I_t représentent respectivement le revenu national, la consommation et l'investissement de la période t.

Où β et I_a sont des constantes positives.

a) D'un point de vue économique, que représentent c et β ?

b) Écrivez l'équation de récurrence vérifiée par le revenu national.

c) Donnez la solution générale de l'équation homogène associée.

d) Donnez la solution d'équilibre.

e) Discutez de l'évolution de Y_t suivant les valeurs du coefficient β et c.